

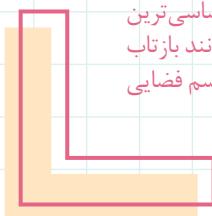


Mahmood Naseri

تفکر هندسی و مفهوم‌های هندسی

مقدمه

در این سلسله مقاله‌ها سعی در اشاعه مفهوم‌ها و تفکر هندسی داریم و می‌کوشیم دانش آموزان و مخاطبان مجله را با ساختار هندسه و مفهوم‌های اولیه آن آشنا کنیم. این مجموعه مخصوص دانش آموزی است که در دوران ابتدایی تا حودودی با مفهوم‌های هندسه به طور شهودی و غیر مستقیم آشنا شده است. در این مقاله‌ها بررسی و بیان مفهوم‌های هندسی دقیق‌تر از آن است که دانش آموزان در دوره ابتدایی با آن‌ها آشنا می‌شوند. در دوره اول متوسطه، دانش آموزان در سطح ۲ و تا حدودی در سطح ۳ از مدل توسعه تفکر هندسی قرار می‌گیرند. یعنی در این سطح دانش آموزان باید بتواند رابطه‌های موجود بین شکل‌های هندسی را تشخیص دهند و آن‌ها را براساس ویژگی‌ها دسته‌بندی کنند. مثلاً در یک چهارضلعی، ضلع‌های مقابله دویمه‌دو موازی‌اند و در نتیجه، زاویه‌های مقابل هماندازه هستند. در این سطح اثبات‌های غیررسمی را دنبال می‌کیم و دانش آموزان را با اثبات‌هایی با گام‌های محدود آشنا می‌سازیم. می‌کوشیم از استدلال‌های غیررسمی گام‌به‌گام وارد در ک استنتاج شویم و آن‌ها را با استدلال‌های رسمی‌تر آشنا کنیم. به همین دلیل آموزش هندسه در سال‌های هفتم، هشتم و نهم از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در این سال‌ها با مرور مفهوم‌هایی که در دوره ابتدایی با آن‌ها آشنا شده‌اند و استفاده از نمادها و حرفهای لاتین، برای مفهوم‌هایی مانند پاره خط، زاویه و اندازه‌های آن‌ها و همچنین مثلث و کلاً چندضلعی‌ها، سعی می‌شود دانش آموزان با تعریف‌های بیشتر و دقیق‌تری آشنا شوند. از جمله اساسی‌ترین مفهوم‌هایی که در این دوره شما دانش آموزان با آن‌ها آشنا می‌شوید، می‌توان به همنهشتی، تقارن و تبدیل‌های هندسی مانند بازتاب (برگ‌داندن)، انتقال (لغزاندن)، دوران (چرخاندن) و تشابه اشاره کرد. همچنین یکی دیگر از سرفصل‌های مهم، تفکر و تجسم فضایی و بررسی شکل‌های سه‌بعدی است که در این دوره همراه با محاسبه مساحت و حجم مطالعه می‌شوند.



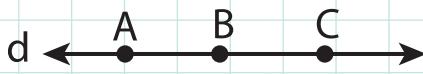
هر مجموعه‌ای از نقطه‌ها را یک شکل می‌نامیم.

اگر A و B دو نقطه باشند، خطی را که از این دو نقطه می‌گذرد با نام \overline{AB} نشان می‌دهیم که شکلی به صورت شکل ۱ است. خط را گاهی با یک حرف، مثلاً d نیز نشان می‌دهند.



شکل ۱

۱. از هر دو نقطه متمایز فقط یک خط می‌گذرد.
۲. نقطه‌هایی را که روی یک خط واقع باشند «هم خط» می‌نامند.

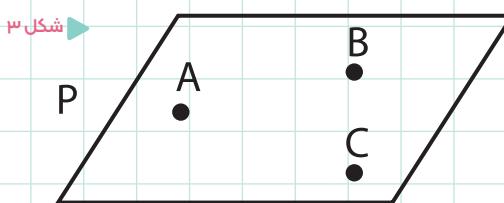


شکل ۲

در شکل ۲، A، B و C هم خط‌اند و نقطه B بین دو نقطه A و C واقع است.

۳. سه نقطه وجود دارند که روی یک خط واقع نیستند.
۴. به ازای هر سه نقطه متمایز که روی یک خط نباشند، دقیقاً یک صفحه وجود دارد که شامل این سه نقطه است. صفحه را با حرف‌هایی مانند P، Q و غیره نشان می‌دهیم.

در شکل ۳، صفحه P و سه نقطه A، B و C روی آن را مشاهده می‌کنید.



در شکل ۳، شکلی مانند متوازی الاضلاع را مشاهده می‌کنید، اما توجه داشته باشید که این فقط یک نمایش است. تصوری که از صفحه در هندسه اقلیدسی داریم این است که این صفحه از همه طرف ادامه دارد.

همه گفته‌های بالا در هندسه‌ای مطرح هستند که ما «هندسه اقلیدسی» می‌نامیم. امروزه همان‌گونه که در همه علوم پیشرفت‌هایی صورت گرفته، هندسه نیز از این امر استثنای نبوده است و انواع و اقسام هندسه‌ها کشف شده‌اند که همگی در جای خود کاربرد خاص خودشان را دارند.

ممکن است در مکان محدودی از کره زمین که ما روی آن زندگی می‌کنیم، مثلاً برای ساختن یک ساختمان، یا ساختن در و پنجره‌های آن، از ویژگی‌های هندسه اقلیدسی استفاده کنیم، اما محاسبه مسیر هواییما یا محاسبه‌های مربوطه به قرار دادن ماهواره در مدار زمین، به هندسه‌های دیگر نیاز دارد.

وقتی شما از تهران از طریق شهر اصفهان به شیراز مسافت می‌کنید، می‌گوییم اصفهان بین تهران و شیراز است. این همان مفهوم بین بودن یا «بینیت» در هندسه اقلیدسی است که نقطه B بین دو نقطه A و C است (شکل ۴).

اجزای ساختمان هندسه و مفهوم‌های اولیه آن

اجزای اصلی ساختمان هندسه را نقطه، خط و صفحه تشکیل می‌دهند. وقتی هندسه را در فضای دو بعدی و سه بعدی بررسی می‌کنیم، این سه واژه اساس کار ما هستند. می‌دانیم هندسه از قدیمی‌ترین مفهوم‌های ریاضی است که تابقه‌ای بیش از دو هزار ساله دارد.

اقلیدس، یکی از مشهورترین ریاضی دانان یوتان است، او اولین فردی است که هندسه را به صورت یک علم «اصل موضوعی»، مرتب و در کتابی به نام «اصول» آن را تنظیم کرد. این کتاب برای بیش از ۲۰۰۰ سال مورد توجه ریاضی دانان بوده است. با نگارش این شاهکار، اقلیدس تجربه و کارهای پیشینیان خود در قرن‌های جلوتر را گردآوری کرده و به صورت مرتقب و روند منطقی، با شروع از فرض‌های ساده و بنا کردن هندسه روی آن‌ها، با پرهان منطقی ارائه داده است.

اقلیدس سعی کرد که تمام واژه‌ها و کلمه‌ها، مانند نقطه، خط و صفحه را تعریف کند. مثلاً نقطه را به صورت «چیزی که هیچ جزئی ندارد»، یا خط را طولی بدون عرض و خط مستقیم را چنین تعریف کرد: «خطی که تمام‌بار نقطه‌هایی که روی خودش هستند واقع باشد».

آشکار است که چنین تعریف‌هایی نه واضح‌اند و نه مفیدند، زیرا باید قبل از تصوری از آن‌ها داشته باشیم.

امروزه می‌دانیم که غیرممکن است که تمام این واژه‌ها را بتوانیم تعریف کنیم، زیرا با مشکل «دوری بودن» در تعریف‌ها روبه‌رو خواهیم شد. مفهوم دور در ریاضی آن است که شما ممکن دارد یک مفهوم A را براساس یک مفهوم B تعریف کنید، اما در تعریف خود B به طور مستقیم یا غیرمستقیم ممکن از مفهوم A استفاده کنید. بنابراین به جای آنکه بکوشیم هر واژه‌ای را تعریف کنیم تعدادی از آن‌ها را که مبنای برای تعریف واژه‌های دیگر هستند، تعریف نشده در نظر می‌گیریم و بقیه را به کمک آن‌ها تعریف می‌کنیم.

در هندسه صفحه و فضاء، سه واژه نقطه، خط و صفحه را تعریف نشده در نظر می‌گیریم و هر جا لازم باشد منظورمان از این کلمه‌ها را بیان می‌کنیم. مثلاً وقتی نقشه یک شهر را در نظر می‌گیریم، خانه‌شما در این شهر به عنوان یک نقطه در نظر گرفته می‌شود. حال اگر نقشه کشور را در یک صفحه در نظر بگیرید، شهر شما به عنوان یک نقطه در نظر گرفته می‌شود.

در هندسه‌ای که شما می‌خواهید و آن را «هندسه اقلیدسی» می‌نامند، خط را مستقیم در نظر می‌گیریم و ابتدا و انتهایی برای آن قائل نمی‌شویم. اما وقتی هواپیمایی مثلاً از تبریز به بندرعباس می‌رود، مسیر آن واقعاً این خط مستقیم نیست، و روی کمانی از یک دایره حرکت می‌کند. این دایره روی کره زمین، یک خط در نظر گرفته می‌شود و این هندسه‌ای است که «هندسه روی کره» نامیده می‌شود.

همه این مثال‌ها موجب می‌شوند این واژه‌ها را تعریف نشده پذیریم و بسته به هندسه‌ای که در نظر می‌گیریم، منظور خود را از آن‌ها بیان کنیم. اما در عوض ویژگی‌هایی را برای این واژه‌ها بیان می‌کنیم که هم رابطه بین آن‌ها را مشخص می‌کند و هم می‌توانیم در حل مسئله‌ها یا قضیه‌ها از آن‌ها استفاده کنیم. ابتدا شکل را تعریف می‌کنیم:

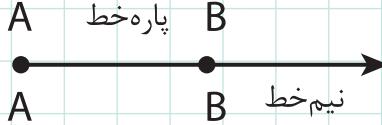


اگر A و B دو نقطه متمایز روی یک خط d باشند، نقطه‌های A و B و همه نقطه‌هایی از خط d را که بین A و B قرار باشند، پاره‌خط AB می‌نامیم و آن را به نشان می‌دهیم.

دو نقطه A و B را دو سر یا نقطه‌های انتهایی پاره‌خط می‌نامند



(شکل ۶).



شکل ۶

نیم خط قسمتی از یک خط است که با یک نقطه از آن جدا می‌شود. آن نقطه را ابتدای نیم خط می‌نامند. چون با یک نقطه روی یک خط دو نیم خط روی آن تعریف می‌شود، پس نیم خط دیگری از خط را که روی نیم خط باشد، در نظر می‌گیریم تا نیم خط کاملاً مشخص باشد. در شکل ۶ نیم خط با ابتدای نقطه A شامل نقطه B را مشاهده می‌کنید که این نیم خط را بنامد AB نشان می‌دهیم.

پس به طور دقیق تر:

نیم خط با ابتدای نقطه A و شامل نقطه B، مجموعه همه نقطه‌های پاره‌خط AB است با مجموعه همه نقطه‌هایی از خط AB که بین آن‌ها و A قرار دارد (شکل ۷).

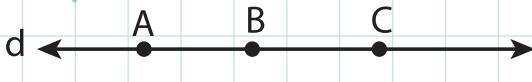
شکل ۷



به کمک نیم خط زاویه تعريف می‌شود.

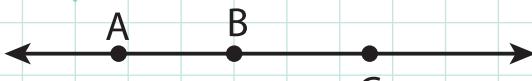
فعالیت: سه نقطه A, B و C روی خط d مفروض‌اند (شکل ۸). چند پاره‌خط می‌توانید نام ببرید که این نقطه‌ها دو سر آن‌ها باشند.

شکل ۸



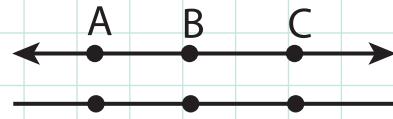
چند نیم خط می‌توانید نام ببرید که این سه نقطه، نقطه‌های ابتدایی آن‌ها باشند. اگر چهار نقطه، پنج نقطه یا شش نقطه روی یک خط داشته باشیم، آیا می‌توانید تعداد پاره‌خط‌ها و نیم خط‌ها را مطابق الگوی بالا حدس بزنید؟ تعداد نیم خط‌ها را چطور؟

شکل ۹



روی یک خط دو نیم خط را که دارای یک ابتدای باشند نیم خط‌های متقابل می‌نامند.

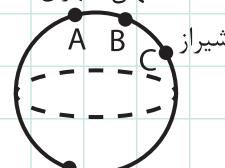
در شکل ۹، BA و BC دو نیم خط متقابل هستند.



شکل ۴ شیراز اصفهان تهران

این تصویری است که ما در هندسه اقلیدسی داریم. اما می‌توانیم هندسه‌ای را تصور کنیم که در آن هنگام مسافرت، اصفهان بین تهران و شیراز نباشد. کره زمین را مانند یک توپ تصور کنید. به جای آنکه برای رفتن از A به C از B عبور کنیم، می‌توانیم از مسیر A و D به C برسیم. می‌توانید توپ را در نظر بگیرید (شکل ۵) و مسیری روی آن مشخص کنید تا مسیرهای به جای آنکه از A به B و سپس به C بروند، از A به D و سپس به C بروند. پس در هندسه‌ای که روی کره زمین در نظر می‌گیریم، مفهوم خط به غیر از آن خطی است که در هندسه اقلیدسی تصور می‌کنید و مفهوم بین بودن از بین می‌رود. یعنی نمی‌توانیم بگوییم کدام نقطه بین دو نقطه دیگر است.

اصفهان تهران



شکل ۵

این هندسه نوعی از هندسه‌هایی است که به هندسه‌های غیراقلیدسی یا «نااقلیدسی» معروف‌اند. در این نوع هندسه روی کره، دایره‌هایی روی کره که مرکز آن‌ها مرکز کره است، خط در نظر گرفته می‌شوند. به همان خوبی که فاصله‌ها و مسئله‌هایی را در هندسه اقلیدسی حل می‌کنیم و به کار می‌بریم، در این هندسه نیز وزیر خودش می‌توانیم این موارد را به کار ببریم. در واقع در این هندسه صفحه‌ما همان صفحه کره است؛ گرچه از نظر ما خمیده به نظر می‌رسد و آن صفحه‌ای که شما در ذهن دارید نیست.

شاید تا اینجا توانسته باشیم شما را راضی کنیم که چرا مفهوم‌های نقطه، خط و صفحه را تعریف نمی‌کنیم، بلکه در هر هندسه‌ای مظلوم خودمان را از این واژه‌ها بیان می‌کنیم. البته دلیل‌های خیلی بیشتر و قاعده‌نامه‌تری در این مورد وجود دارند که با توجه به مقطعی که شما عزیزان در آن هستید، قابل بیان نیستند، یکی از مهم‌ترین آن‌ها نظریه‌ای به نام «نظریه نسبیت اینشتین» است که بدون هندسه‌های غیراقلیدسی امکان پذیر نیست و در سال‌های بعد می‌توانید با آن آشنا شوید. اکنون می‌توانیم مفهوم‌هایی پاره‌خط، نیم خط، زاویه مثلث و به طور کلی چندضلعی‌ها را تعریف کنیم. هر چند قللاً با این مفهوم‌ها آشنا شده‌اید، اما چون در اینجا، بنا بر ساختن هندسه از ابتداست و برای آنکه در بخش‌های بعدی نیاز به توضیح نباشد، آن‌ها را مرور می‌کنیم.

اساس شکل‌های هندسی را پاره‌خط‌ها و زاویه‌ها تشکیل می‌دهند. پاره‌خط قسمتی از یک خط است که به دو نقطه متمایز آن محدود می‌شود. اگر بخواهیم دقیق‌تر صحبت کنیم تعريف پاره‌خط به این صورت است؛